OSTRUZIONI E PASSAGGI NELLA DIALETTICA CONTINUO / DISCRETO: IL CASO DEI GRAFI ESISTENZIALI E DELLA LOGICA DEI FASCI

[Dedalus – Rivista di scienza, filosofia, cultuta 2 (2007): 20-25]

Fernando Zalamea

Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional de Colombia

http://www.matematicas.unal.edu.co/~fzalamea

La contrapposizione tra **continuo e discreto**, sempre presente nella cultura occidentale a partire dai grandi maestri della filosofia greca, può considerarsi al centro delle problematiche più profonde nella matematica. L' "aporia del continuo e del discreto", come la chiama René Thom nella sezione tematica[1] dell'Enciclopedia Einaudi, risulta, per il medaglista Fields, *l'aporia fondatrice* di tutta la matematica. Così, la matematica dovrebbe fondarsi non su di una qualunque formalizzazione *limpida*, come la teoria degli insiemi, ma sulla *contraddizione* derivante dall'intreccio/opposizione tra il continuo ed il discreto.

Il Convegno di Gargnano ha studiato, sotto le diverse prospettive provenienti della matematica e della filosofia, la ricchezza di questa contraddizione. Infatti, tanto nella pratica *induttiva*, come nell'*abduzione* creativa, sia in matematica che in filosofia, le **ostruzioni** ed i **passaggi** tra continuo e discreto stanno al centro dell'invenzione tecnica e della riflessione epistemologica. In questo articolo, mi rivolgerò ad alcune questioni filosofiche sollevate dai conferenzisti del Convegno, e tenterò di dare alcune risposte parziali dal punto di vista della logica matematica a partire da due specifiche angolazioni: i **grafi esistenziali** di Peirce (1890-1910) e la **logica dei fasci** (1970-oggi). Emergeranno così due punti centrali:

(1) la descrizione di una possibile svolta per trattare *intuizionisticamente* i grafi, in modo da risolvere così la principale *ostruzione* nei grafi, associati attualmente alla logica classica, ma che dovrebbero corrispondere *invece* ad una logica topologica (*i.e.* intuizionista), più vicina al *continuo* sul quale evolvono i grafi;

---

[1] René Thom, "L'aporia fondatrice delle matematiche", *Enciclopedia Einaudi*, vol. 15, pp. 1133-1146, Torino: Einaudi, 1982.

(2) la constatazione che la logica classica appare (dimostrabilmente) nella logica dei fasci come il *limite* della logica intuizionista nelle fibre del fascio, rendendo così possibile spiegare, con un nuovo argomento tecnico, il *passaggio* dal continuo al discreto e appoggiando in parte la supposta *anteriorità* ontologica del continuo sul discreto secondo Thom[2].

1. Alcuni interventi nel Convegno di Gargnano

Riassumerò qui il contenuto di alcuni interventi presentati al Convegno di Gargnano che mi hanno molto colpito, tanto per la profondità degli argomenti (che mi scuso di semplificare), quanto per la possibilità di poter essere legati a considerazioni tecniche di logica matematica, tanto dalla prospettiva dei grafi di Peirce (sezione 2 di questo articolo) che dalla prospettiva della logica dei fasci (sezione 3). Rossella Fabbrichesi, rivolgendosi ad Aristotele, studiava la problematica di un continuo inteso come "incollamento del contiguo", con la conseguente problematica che sorge nel considerare la superposizione degli estremi di due intervalli contigui: punti che sono "due in uno" e che corrispondono alle tensioni "contraddittorie" della molteplicità nell'unità. Come capire infatti in un continuo il *molteplice-in-uno*? Si tratta di una domanda profonda che sottotende a tutta la storia della filosofia e della matematica, e a cui tanto i grafi esistenziali, quanto la logica dei fasci, provvedono, come vedremo, originali risposte parziali. Marco Panza, dialogando anche lui con Aristotele, segnalava come si debba studiare la continuità attraverso una rete complessa di processi ed *azioni* non riducibile a delle considerazioni sugli oggetti in gioco. La dinamica intrinseca del continuo, essenzialmente relazionale, non può infatti essere ridotta ad una modellistica statica, essenzialmente predicativa, che, solo dopo, si porrebbe poi in movimento. Come impostare in un continuo questa *specificità* relazionale, legata ad azioni e non a oggetti? Vedremo come, anche qui, grazie ai grafi ed ai fasci, si possono fornire alcune risposte positive a queste domande.

Carlo Sini esprimeva la difficoltà di vedere certe forme di *discontinuità estensive* come "precipitazioni" di una sorta di *continuo intensivo* generico. Cercando l'elusiva *soglia* tra continuo e discreto, Sini proponeva di definire il continuo come una "soglia che precipita" con incessanti azioni e reazioni accanto al precipizio. Vedremo che, nella logica dei fasci, la ricerca di un *topos* generico per la continuità risponde, in maniera precisa, ai movimenti nella soglia scorti da Sini. D'altro canto, il continuo generico proposto da Peirce "precipita" in modelli estensivi parziali: i reali cantoriani (estensivi) non sono che "the first embryon of continuity (...), a germinal of continuity"[3] del continuo (intensivo) di Peirce. A sua volta, Giuseppe Longo indicava come la ricostruzione del continuo a partire da marche discrete (eseguita dal programma cantoriano) deve confrontarsi con enormi difficoltà, tanto

[2] René Thom, "L'Anteriorité Ontologique du Continu sur le Discret", in: Jean-Michel Salanskis, Hourya Sinaceur, *Le Labyrinthe du Continu*, Paris: Springer-Verlag, 1992, pp. 137-143.

[3] Charles Sanders Peirce, "Multitude and Continuity" (c.1897), in: C. S. Peirce, *New Elements of Mathematics*, The Hague: Mouton, 1976, vol. 3, p. 88.

tecniche, quanto filosofiche. Longo ricordava come la lettura del continuo secondo Veronese, o secondo lo stesso Peirce, adombra la difficoltà di presupporre un'anteriorità del discreto sul continuo. La logica dei fasci aiuta qui a capire che, in fondo, non ci può essere, in modo assoluto, né un'anteriorità ontologica del continuo sul discreto (alla Thom), né tanto meno un'anteriorità del discreto sul continuo. Piuttosto, una piena *aggiunzione* tra modelli continui e gerarchie di modelli discreti sembra dipingere meglio la situazione.

Jean Petitot realizzava a Gargnano una delle sue brillanti esposizioni dove con accuratezza combinava filosofia, matematica, logica contemporanea e neuroscienza. Petitot proponeva una sorta di anteriorità della geometria rispetto alla logica, congetturando l'esistenza di una sequenza di "proto-oggetti", tipi e forme nucleari, in una comprensione fenomenologica del mondo. Petitot, buon conoscitore della logica dei fasci, menzionava la sua importanza in un paio di commenti marginali agli interventi dei colleghi, ma non la metteva al *centro* del dibattito. A nostro avviso invece, la logica dei fasci non può essere elusa e deve essere situata al centro di un'eventuale comprensione dell'aporia/dialettica tra continuo e discreto; la logica dei fasci dovrebbe avere per il nostro modo di fare filosofia nel XXI^{esimo} la stessa determinante influenza che la logica classica del primo ordine ha avuto per lo sviluppo della filosofia analitica nel XX^{esimo} secolo.

Michel Bitbol ci sorprendeva, mostrando come uno dei grandi "paradigmi" della meccanica quantistica, i salti di discontinuità, non solo altro che "finzioni utili", non realmente necessarie nello sviluppo matematico della teoria. Questo *capovolgimento* corrisponde al capovolgimento che si ottiene nella logica dei fasci, quando si dimostra che la logica classica non è altro che un'"utile finzione", un limite *ideale* della logica intuizionista *reale* nelle fibre. I "punti" classici, le discontinuità, spariscono anche nei grafi esistenziali, dove le nozioni continue di vicinanza e regione sono alla base del calcolo. Per ultimo[4], Claudio Paolucci ricordava come la logica triadica di Peirce, la logica della "goccia d'inchiostro"[5], poteva essere vista come una "prima" logica naturale per avvicinarsi al continuo e serviva come una sorta di mediazione estensionale tra il discreto classico ed il continuo modale delle possibilità pure. Completando l'intervento di Paolucci, ricorderemo qui come i grafi esistenziali Gamma rispondono a certe ostruzioni nel mondo dei *possibilia*, ma sarà interessante sopratutto notare come la logica triadica di Peirce risulta essere un caso particolare della logica dei fasci, sopra lo spazio topologico di Sierpinski.

2. I GRAFI ESISTENZIALI DI PEIRCE

I grafi esistenziali[6] di Peirce rispondono all'idea di trasmettere informazioni su un continuo, *trasformando dei grafi attraverso certe regole e secondo alcune convenzioni*. Il *continuo*

[4] Non faccio riferimento qui all'intervento di Rocco Ronchi, del quale non ho purtroppo avuto la possibilità di prendere appunti durante il Convegno.

[5] Charles Sanders Peirce, "Grand Logic" (1893), in: C. S. Peirce, *Collected Papers*, Bristol: Thoemmes Press, 1998, 4.127 (prima edizione: Harvard University Press, 1931-1958; CD-Rom: Intelex Corporation, 1992).

[6] Per un eccellente approccio ai testi di Peirce sui grafi, si veda Charles Sanders Peirce, *Pragmatismo e grafi esistenziali*, Milano: Jaca Book, 2003. Il volume, a cura di Susanna Marietti, provvede un esteso studio

logico è inteso da Peirce come una pagina in bianco sulla quale si marcano progressivamente le formule dimostrabili, mentre il *verso* della stessa pagina è invece inteso come il luogo della falsità, o, più accuratamente, come il luogo della *contingenza*, dove le formule *possono* essere invalidate. Questo "continuo logico" può essere rappresentato dal piano cartesiano **R**x**R**, o, meglio ancora, come presto vedremo, dal piano *complesso* **C**. Nel piano si distendono ovali racchiusi uno nell'altro, dividendo il piano in regioni pari (con un numero pari di ovali attorno alla regione) ed in regioni dispari (con un numero dispari di ovali attorno alla regione). Un grafo *Alfa* è una sequenza di ovali inscritti uno nell'altro, con certe informazioni *proposizionali* marcate negli ovali[7]. I permessi per *muovere* i grafi Alfa sul piano sono i seguenti[8]: (1a) qualsiasi grafo può essere *marcato* in una regione dispari; (1b) qualsiasi grafo può essere *cancellato* da una regione pari; (2a) qualsiasi grafo può essere *iterato* verso una regione con una quantità maggiore di ovali; (2b) qualsiasi grafo suscettibile di apparire come un grafo iterato può essere *deiterato* (cancellato); (3a) un doppio ovale (senza informazione proposizionale nella corona) può essere *introdotto* attorno a qualsiasi grafo; (3b) un doppio ovale può essere *cancellato* attorno a qualsiasi grafo.

I permessi (1a) e (1b) codificano l'idea di aggiungere qualsiasi cosa nella falsità, e di sottrarre qualsiasi cosa dalla verità. I permessi (2) formano il *cuore* dei sistemi di Peirce; se intendiamo un ovale come una *negazione* (un "buco" nel piano, che ci permette di passare dalla verità alla falsità), le regole (2a) e (2b) corrispondono all'equivalenza hilbertiana $p \wedge \neg q \Leftrightarrow p \wedge \neg(p \wedge q)$ (p iterato da sinistra a destra, e deiterato da destra a sinistra). Questo "andare e venire" attraverso la negazione, apparentemente innocuo, è infatti una potentissima proprietà *generica* di *qualsiasi* connettivo *intuizionista* monadico[9]: © risulta essere un tale connettivo *se e solo se* $p \wedge ©q \Leftrightarrow p \wedge ©(p \wedge q)$. Un secolo dopo Peirce, si scopre dunque che l'iterazione e la deiterazione nei sistemi di grafi sono al centro stesso della problematica dei connettivi intuizionisti. D'altro canto, il permesso (3a) continua ad essere intuizionista mentre il permesso (3b), invece, *non è accettabile* intuizionisticamente. Se vogliamo essere coerenti con l'idea basica che i grafi devono codificare dei trasferimenti su

---

introduttorio e ha il considerevole merito di essere la prima raccolta dedita ai grafi di Peirce in *qualunque idioma* (!). Ben cent'anni dopo il suo "*chef d'oeuvre*" (come lo stesso Peirce descriveva i grafi: "Letter to Jourdain" (1908), citata in Don Roberts, *The Existential Graphs of Charles S. Peirce*, The Hague: Mouton, 1973, p. 110), è ora di prendere *veramente* sul serio la profondità e la ricchezza dei grafi.

[7] Non esibiamo qui i diagrammi corrispondenti, e ci limiteremo perciò solo ad una breve riflessione sui grafi. Nondimeno, per chi non abbia mai visto i grafi, è imprescindibile *vivere l'esperienza* delle dimostrazioni grafiche. Si veda, per esempio, Don Roberts, *The Existential Graphs of Charles S. Peirce*, The Hague: Mouton, 1973. Nella mia esperienza particolare, ho tenuto un corso di logica proposizionale e di primo ordine, con sistemi di tipo hilbertiano e con i grafi esistenziali, in modo parallelo: posso testimoniare, dall'entusiasmo e dai risultati ottenuti nelle prove con i grafi, che gli studenti non solo *vedevano*, ma erano anche capaci di *trovare*!

[8] Si dovrebbero dare qui qualche precisazione che omettiamo. I sistemi di grafi esistenziali possono ricevere una trattazione matematica del tutto rigorosa, con definizioni ricorsive del linguaggio e delle regole di deduzione.

[9] Xavier Caicedo, Roberto Cignoli, "An algebraic approach to intuitionistic connectives", *Journal of Symbolic Logic* 66 (2001), pp. 1620-1636.

di un *continuo*, e dunque che la logica associata deve essere un frammento intuizionista[10], la regola (3b) dovrebbe essere scartata. Indicheremo più avanti come si può avanzare in questa direzione.

Essendo rappresentata l'intensione di un grafo da un ovale attorno al grafo, l'implicazione nei grafi Alfa si legge come un connettivo *intensionale* e non estensionale: *p* implica *q* se l'intensione di *p* è più *grande* dell'intensione di *q* (mentre una lettura estensionale, con diagrammi di Venn per esempio, direbbe il contrario: l'estensione di *p* é più piccola dell'estensione di *q*). Questa lettura intensionale dei connettivi non era certo nuova al tempo di Peirce (era già corrente nella logica medievale e prediletta anche da Leibniz), ma praticamente sparisce dopo l'invenzione dei grafi esistenziali[11]. Una strada da esplorare consiste proprio nel leggere l'implicazione intensionalmente, come viene proposta nei grafi, *non* ricostruendola attraverso degli ovali come negazioni, ma cercando *leggi intensionali specifiche* per i trasferimenti associati all'implicazione. Questa linea di ricerca risponde alle osservazioni di Panza, secondo cui il continuo si dovrebbe studiare attraverso *azioni* come quelle, ad esempio, che sono rappresentate dai trasferimenti di informazione intensionale nel piano. Queste ultime sono infatti delle azioni intensionali che *non* sono descritte mediante oggetti estensionali e nelle quali l'importanza della *relazione* intensionale di derivabilità viene quindi a trovarsi in primo piano.

Il continuo generico non cantoriano[12] di Peirce è un altro spazio concettuale dove si incrociano differenti intensionalità. Infatti, il continuo di Peirce non è estensionale, già che la sua fortissima proprietà di *riflessività* (qualunque parte possiede una parte similare al tutto) preclude la possibilità di avere punti in quel continuo generico (un punto non possiede una parte similare al tutto). Nondimeno, il continuo di Peirce *precipita* incessantemente, nel senso di Sini, quando i punti vengono marcati su realizzazioni parziali del modello generico originale. Qualunque marca passa ad essere una precipitazione estensionale, una concrezione particolare di una modalità generale. Nei grafi Alfa qualcosa di simile occorre quando una marca proposizionale viene scritta sulla pagina in bianco: la modalità intensionale e generale del vero si "incarna" in un frammento estensionale, particolare, di verità. Altro affare sarebbe ricostruire l'intensionalità generica partendo da una somma di marche estensionali particolari (i punti): Longo segnalava come questa

[10] Qui si approfitta dai risultati classici di Tarski (la logica associata agli spazi topologici è intuizionista) e di Lawvere (la logica associata ai *topoi* elementari è intuizionista), secondo cui le logiche *naturali* associate a considerazioni di continuità dovrebbero essere viste come frammenti intuizionisti. Certo, Peirce non poteva immaginare questi sviluppi in un'epoca nella quale l'intuizionismo non appariva ancora all'interno del panorama logico del tempo.

[11] L'enfasi moderna sulla estensionalità (insiemistica) è una delle ragioni della poca considerazione di cui, fino ad oggi, hanno goduto i grafi di Peirce. Ma ci sono molte altre ragioni più pedestri. Per l'influenza negativa di certi commenti di Quine, si veda Fernando Zalamea, "Peirce's logic of continuity: existential graphs and non-cantorian continuum", *The Review of Modern Logic* 9 (2003), pp. 115-162.

[12] Per un *panorama* sul continuo secondo Peirce si veda Fernando Zalamea, *El continuo peirceano*, Bogotá: Universidad Nacional, 2001, o Jérôme Havenel, *Logique et mathématique du continu chez Charles Sanders Peirce* (tesi dottorale), Paris: EHESS, 2006.

impresa sembra però destinata all'insuccesso qualora essa venga ritenuta come l'unico vero paradigma di continuità.

D'altro canto, nel *verso* dei grafi Alfa, si apre tutto un mondo di contingenze e di logiche modali: i grafi Gamma[13]. I grafi Gamma rispondono in parte alla domanda, sollevata da Fabbrichesi, di come intendere il molteplice-in-uno dentro un intorno di un continuo. Infatti, nel *verso* Gamma dei grafi Alfa, Peirce vedeva un *libro* di *molte* pagine di contingenza[14], tutte saldate in un *unico* punto di ramificazione. Nel continuo dei grafi esistenziali, il *passaggio* al molteplice si ottiene dunque al passare dal *verso* all'uno; nello stesso modo, nel continuo generico non cantoriano di Peirce, il molteplice di tutti i *possibilia* si superpone (come luogo indeterminato) su qualsiasi marca effettiva. In un progetto (in corso) di matematizzare i grafi, sto cercando di utilizzare l'apparato di strumenti delle *funzioni di variabile complessa* per rappresentare i diversi tipi di grafi e le loro trasformazioni. Nel caso Beta (grafi che corrispondono alla logica classica di primo ordine sopra un linguaggio puramente relazionale), le iterazioni e deiterazioni della linea di identità (quantificatore *esistenziale*: da cui deriva il nome "grafi esistenziali") sembrano corrispondere a *continuazioni analitiche* e, nel caso Gamma, le trasformazioni del libro di pagine di contingenza sembrano corrispondere a trasformazioni analitiche tra *superfici di Riemann*[15]. Se questo dovesse dimostrarsi corretto, sarebbe possibile catturare il molteplice-in-uno associato ai grafi esistenziali nella migliore forma possibile grazie all'apparato di strumenti messo in campo da Riemann, il quale fu costruito *precisamente* per rispondere alla "dialettica" del molteplice-in-uno per le funzioni multiformi di una variabile complessa.

I grafi esistenziali di Peirce si aprono al mondo delle possibilità, ma non sembrano però modellare bene il mondo della polivalenza. La logica della "goccia d'inchiostro" secondo Peirce (che è stata la prima logica polivalente presentata con tavole di verità) studia le tre alternative di *relazione continua* tra un punto ed una macchia prodotta da una goccia di inchiostro su di una pagina bianca: (1) esiste una vicinanza del punto tutta in bianco (il punto si trova all'*esterno* della macchia); (2) esiste una vicinanza del punto tutta in nero (il punto si trova all'*interno* della macchia); (3) qualunque vicinanza del punto possiede sottoregioni in bianco e in nero (il punto si trova sulla *frontiera*). Come indicava Paolucci nel Convegno di Gargnano, la base del ragionamento consiste nel *capovolgere* una lettura discreta (legata a punti, che sarebbero binariamente "bianchi o neri"), per convertirla in una lettura continua, legata a *vicinanze* sottoposte ad una logica triadica. Vedremo nella terza sezione di questo articolo come la logica dei fasci codifica questa idea di una semantica continua, secondo cui i valori di verità non dovrebbero essere discreti (modellati come punti classici), ma piuttosto continui (modellati come vicinanze intuizionistiche).

---

[13] Per una presentazione delle logiche modali associate ai grafi Gamma, si veda Jay J. Zeman, *The Graphical Logic of C.S. Peirce*, Ph.D. Thesis, University of Chicago, 1963. La mala fortuna dei grafi è proverbiale: la tesi di Zeman è l'*unico* luogo dove si studiano con cura i sistemi modali Gamma, e non fu mai pubblicata. Adesso è disponibile nella pagina web di Zeman: http://www.clas.ufl.edu/users/jzeman/.

[14] Charles Sanders Peirce, "Lowell Lectures" (1903), in: Peirce *Collected Papers*, *op. cit.*, 4.512.

[15] "Principes fondamentaux pour une théorie générale des fonctions d'une grandeur variable complexe" (tesi dottorale, 1851), in: Bernhard Riemann, *Oeuvres mathématiques*, París: Gauthier-Villars, 1898, pp. 1-60.

Le osservazioni incluse in questa sezione mostrano come i grafi esistenziali servano per capire meglio certi *passaggi* tra il discreto ed il continuo. Rimane, nonostante ciò, un problema cruciale già segnalato: i grafi dovrebbero potersi leggere intuizionisticamente, in modo da *riflettere* il continuo su cui essi evolvono. In un articolo recente[16], Brady e Trimble hanno conseguito un cambio di prospettiva molto importante per lo studio futuro dei grafi Alfa (Brady e Trimble hanno fatto avanzare anche la nostra comprensione dei grafi Beta, ma non entrerò qui in quelli sviluppi[17]). Dai lavori di Brady e Trimble emergono due risultati centrali: (A) ogni grafo può vedersi come un'operazione algebrica; (B) le regole di deduzione Alfa corrispondono a adeguate commutazioni di diagrammi tra "forze" funtoriali. Il passo conseguito apre nuove strade, già che i grafi (enti diagrammatici intuitivi) passano ad essere trattati come simboli combinatori, enti pienamente matematici su cui si può utilizzare l'enorme apparato tecnico dell'algebra astratta moderna. L'intorno dove si realizza questa codificazione combinatoria sono le *categorie monoidali*[18] e, in particolare, le *teorie algebriche di Lawvere*[19].

Brady e Trimble mostrano, con un esempio, come un grafo da luogo ad un'operazione algebrica nella teoria algebrica elementare di Lawvere; seguendo le sue idee, si può vedere come ogni grafo da luogo ad un'operazione algebrica, estendendo ricorsivamente le trasformazioni. Nozioni combinatorie come "profondità" o "intreccio" potrebbero allora essere applicate ai grafi, gettando così nuova luce sulla struttura dei grafi stessi. Questa lettura (A) si rivolge alla struttura sintattica dei grafi. La lettura (B) apre invece delle altre prospettive ancora più significative. Dato un funtore controvariante F sopra una categoria monoidale (con "prodotto" denotato da $\otimes$), una *forza* per il funtore F si definisce[20] come una trasformazione naturale $\Theta_{ab} : F(a)\otimes b \rightarrow F(a\otimes b)$. Nel caso dei grafi esistenziali, la negazione $\neg$ si attua come un funtore controvariante tra le operazioni algebriche associate ai grafi, e la "forza" per la negazione corrisponde ad una trasformazione naturale : $(\neg a)\otimes b \rightarrow \neg(a\otimes b)$. *Mediante* questa forza, nella teoria algebrica di Lawvere associata ai grafi si ottiene la commutazione

[16] Geraldine Brady, Todd Trimble, "A categorical interpretation of C. S. Peirce's propositional logic Alpha", *Journal of Pure and Applied Algebra* 149 (2000), pp. 213-239.

[17] Geraldine Brady, Todd Trimble, "A string diagram calculus for predicate logic and C. S. Peirce's system Beta", preprint (1998-2000).

[18] Le categorie monoidali sono l'intorno categorico naturale per rappresentare monoidi generali. Gli esempi abbondano: categorie cartesiane (in particolare, categoria degli insiemi), categoria di R-moduli, categoria delle categorie... I "monoidi" in quelle categorie danno luogo, rispettivamente, ai monoidi usuali, le R-algebre, le triple (o monade). Si veda Saunders MacLane, *Categories for the Working Mathematician*, New York: Springer, 1971.

[19] Si veda Ernest Manes, *Algebraic Theories*, New York: Springer, 1976.

[20] La nozione di "forza" è dovuta a Max Kelly, *Basic Concepts of Enriched Category Theory*, London: Cambridge University Press, 1982. Il caso del concetto di "forza" è molto istruttivo: appare come un concetto puramente formale per risolvere astratte "condizioni di coerenza" (ridurre la commutazione di un'infinità di diagrammi alla commutazione di *finiti* diagrammi: una sorte di problematica di assiomatizzabilità finita), e dopo comincia a sorgere negli intorni più diversi: grassmanniane in calcolo differenziale, forze deboli in fisica, connettivi in logica lineare, fino ad arrivare ai grafi esistenziali... Meraviglia della matematica, e problematica profonda della sua "irragionevole applicabilità" al mondo fisico.

$a \otimes b \rightarrow (\neg\neg a) \otimes b \rightarrow \neg(b \otimes \neg(a \otimes b)) \otimes b \rightarrow \neg\neg(a \otimes b) = a \otimes b \rightarrow \neg\neg(a \otimes b)$. Se osserviamo che la seconda freccia è un'*iterazione* (doppia) di b lungo la negazione ¬, e che la terza freccia è una *deiterazione* (singola) di b composta con una proiezione (b cancellata), vediamo come le due regole fondamentali dei grafi (iterazione, deiterazione) si *analizzano* ancora di più grazie alla nozione di forza. Questo risultato non è solo interessante dal punto di vista matematico, come svilupperemo in seguito, ma anche dal punto di vista filosofico. Peirce, infatti, aveva introdotto i grafi per poter realizzare un'*analisi* ultima delle trasformazioni logiche. Con la lettura categorica e *sintetica* proposta da Brady e Trimble si ottiene un'*ulteriore analisi*: la prova di come l'andare e venire pendolare tra analisi e sintesi può risultare come una dinamica assai ricca di implicazioni teoriche.

Seguendo la prospettiva matematica, Brady e Trimble finiscono il loro articolo inserendo i grafi nel contesto delle categorie *-autonome, le quali sono essenzialmente modelli categorici classici per generalizzare (a spazi topologici di dimensione infinita) il buon comportamento delle algebre booleane. Qui dovrebbe però cominciarsi un'*ulteriore analisi* per eliminare dall'articolo di Brady e Trimble ogni referenza alla logica classica. Le categorie monoidali e le "forze" rimangono infatti in un ambiente categorico naturale per l'intuizionismo, e le commutazioni delle forze, segnalate sopra, rimangono *anch'esse* intuizionisticamente valide. Non c'è bisogno di invocare le categorie *-autonome, e si può invece avanzare direttamente nella comprensione intuizionista dei grafi. L'approssimazione categorica di Brady e Trimble apre dunque *precise* possibilità per un'adeguazione pienamente *continua* dei grafi. Se ricordiamo che uno dei paradigmi della teoria delle categorie rimanda ad una comprensione relazionale, e non estensionale, degli oggetti matematici, l'inserzione naturale dei grafi nell'ambiente categorico sembra essere la buona strada per rinnovare le geniali intuizioni di Peirce.

3. La logica dei fasci

La *teoria dei fasci*[21] merita forse di essere considerata come la *soglia* fondamentale tra la matematica "moderna" (da Galois e Riemann fino ad Hilbert) e la matematica "contemporanea" (sotto la figura maggiore di Grothendieck)[22]. I fasci rispondono ad una delle problematiche più profonde della matematica: salvare l'*ostruzione* delle singolarità locali, e permettere, in certi casi ben definiti, il *passaggio* al globale come *incollamento coerente* del locale. Un fascio viene dato da due spazi topologici ("base" ed insieme delle "fibre") con una proiezione (dalle fibre alla base) che si comporta bene continuamente a livello locale (omeomorfismo per adeguate vicinanze dei punti nella base). In questa

[21] I fasci emergono nell'opera di Jean Leray (corso di topologia algebrica nell'Oflag XVII (1943-45), serie di appunti nei *Compte Rendus de l'Académie des Sciences* (1946), corsi sulle successioni spettrali nel *Collège de France* (1947-50), e trovano la loro forma definitiva nel famoso Seminario di Henri Cartan all' *École normale supérieure* (1948-51).

[22] Per una visione filosofica della *matematica* contemporanea (e non solo della logica contemporanea), spero di avere pronta per il 2008 un'ampia monografia: *Filosofía sintética de la matemática contemporánea*. Un Seminario in corso dal 2006 può essere trovato nella pagina web: http://www.zalameasigma.com/FilMat/.

situazione, scartando binarismi e approssimazioni classiche, gli oggetti matematici catturati nel fascio si capiscono meglio grazie ad una logica di *vicinanze* sopra la base e grazie ad *azioni* naturali di certi gruppoidi sulle fibre.

Da una prospettiva logica, i fasci furono studiati da Tierney e Lawvere nell'emergenza della nozione di *topos* elementare, e una prima semantica categorica lungo i fasci fu proposta da Joyal (semantica di "Kripke-Joyal"). Nondimeno, lo studio più completo della *logica dei fasci* é stato proposto dal matematico colombiano Xavier Caicedo, in un articolo assolutamente brillante[23], ma quasi sconosciuto[24]. Caicedo propone una definizione generale di *fascio di strutture* di primo ordine (di cui il fascio topologico è solo un caso molto particolare), e dimostra che la logica associata alle vicinanze è intuizionista, e costruisce un *modello generico* che permette di "misurare" il grado di booleanità di una proposizione. Come *casi particolari* di un vasto teorema del modello generico, nel quale *la logica classica (nei punti generici del modello) viene vista come limite della logica intuizionista (nelle vicinanze del fascio)*, Caicedo dimostra i risultati fondamentali della logica classica di primo ordine (compattezza, completezza, semantica in ultraprodotti, omissione dei tipi) e, allo stesso tempo, ottiene alcuni risultati centrali di *forcing* nella teoria degli insiemi.

L'"anteriorità" della geometria rispetto alla logica, suggerita da Petitot a Gargnano, si riflette chiaramente nella logica dei fasci, sia nella sua versione "categorica" (alla Lawvere-Joyal), sia nella sua versione "generica" intuizionista (alla Caicedo). Infatti, nella logica dei fasci, vengono dati *prima* gli oggetti geometrici (vicinanze, proiezioni, sezioni) e solo *dopo* si definisce la semantica legata alle vicinanze. La semantica dei fasci è *continua*, e non puntuale. Se una formula è vera in un punto, risulta essere vera anche in una vicinanza adeguata del punto: la geometria intrinseca del fascio si riflette nella logica. Un teorema centrale nella logica dei fasci secondo Caicedo è *il principio del massimo*, secondo cui una formula esistenziale $\exists v \varphi(v)$ vale in una vicinanza U del fascio se e solo se esiste una sezione "quasi globale" σ, definita su un aperto W denso in U, tale che $\varphi(\sigma)$ vale nella vicinanza W. Qui si vede, in modo preciso, come la logica del quantificatore esistenziale rifletta un comportamento geometrico ben peculiare nel fascio. Le conseguenze filosofiche di questa "anteriorità" della geometria con rispetto alla logica –anteriorità esplicita nel caso della logica dei fasci– sono destinate a cambiare in maniera profonda l'impostazione di molti dibattiti sui supposti fondamenti della matematica.

Il molteplice-in-uno considerato da Fabbrichesi risulta perfettamente adatto alla logica dei fasci. Le fibre nel fascio rappresentano, in modo preciso, il multiplo *proiettato* su l'uno. Il due-in-uno non è altro che un caso molto particolare di fibre con due elementi. Le due "copie" dell'intervallo, i cui estremi si sovrappongono, "vivono" in due livelli differenti del fascio e si "incollano" grazie a una sezione globale attorno all'estremo. Seguendo questa stessa direzione, la logica della "goccia d'inchiostro" ricordata da

---

[23] Xavier Caicedo, "Lógica de los haces de estructuras", *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales* XIX (74) (1995), 569-585.

[24] La "maledizione" di scrivere di scienza in spagnolo può ben accostarsi alla "maledizione" di cui hanno sofferto i grafi esistenziali!

Paolucci non è altro che un caso molto particolare della logica dei fasci che si verifica quando si prende il fascio canonico sullo spazio di Sierpinski $X=(\{1,2\},\{\{1,2\},\{2\},\varnothing\})$; si tratta, infatti, di una logica triadica che può essere *completata* con un solo connettivo addizionale ai connettivi intuizionisti usuali.

La logica dei fasci è molto vicina a problemi di rappresentazione nella teoria delle categorie. Per esempio, secondo Moerdijk, il "*topos* classificatore" di un gruppoide continuo *G* è dato dalle sue *G*-azioni, che possono vedersi come *G*-fasci equivarianti[25] (considerando *G* come una categoria). Partiamo così da un continuo, attuiamo su di lui delle "marche", incolliamo le marche grazie a fasci adeguati, e otteniamo un continuo proiettivo superiore. Questo tipo di risultati, apparentemente solo tecnici, rispondono nondimeno con eleganza a domande filosofiche "pure". La ricerca della *soglia* tra continuo e discreto sollevata da Sini, con la domanda del *passaggio naturale* da un continuo intensivo a discontinuità estensive, riceve una parziale risposta grazie a risultati matematici come quello di Moerdijk. Il gruppoide continuo è una forma di continuo intensivo (rafforzato sinteticamente, se leggiamo *G* come una categoria), ma le sue *G*-azioni sono invece forme estensionali discontinue, che servono a rappresentare il *topos generico* associato.

La teoria dei *topoi* –di cui, i *topoi* di fasci (o *topoi* di Grothendieck) formano il nucleo centrale– provvede numerosi esempi di situazioni nelle quale i "punti" classici non servono a catturare la logica (o la *geometria*, dovremmo dire) del *topos*. Come Longo indicava nel suo intervento, questa *ostruzione* fondamentale ci fa pensare che non possiamo pensare puntualmente il continuo. Se la matematica serve come indicatore *prospettivo* per la filosofia (e per la cultura in generale), come ripetutamente sembra essere successo nella storia del pensiero, la teoria dei *topoi* dovrebbe costituirsi, infatti, per il XXI^{esimo} secolo, come un importante paradigma per rinnovare la logica e la filosofia. Così come la teoria degli insiemi e la sua logica naturale associata, vale a dire la logica classica, diedero impulso all'emergenza della filosofia analitica nel XX^{esimo} secolo, la teoria dei *topoi* e la sua logica naturale associata, la logica dei fasci, dovrebbero dare luogo a nuovi sviluppi originali nel pensiero in generale[26].

Le categorie matematiche codificano l'idea di capire un oggetto matematico mediante il suo comportamento funzionale (composizionale e, dunque, sintetico) con il suo intorno. Ampliando la situazione, si potrebbe voler capire gli oggetti dal loro comportamento *relazionale* (e non solo funzionale) con l'intorno. Le *allegorie* di Freyd[27] sono categorie (assiomatiche) di relazioni che rispondono a questo ampliamento, permettendo l'occorrenza

---

[25] Ieke Moerdijk, "The classifying topos of a continuous grupoid", *Transactions of the American Mathematical Society* 310 (1988), pp. 629-668.

[26] Jean Petitot è precisamente uno dei pochi scienziati-filosofi a prendere *realmente sul serio* l'importanza dei *topoi* e dei fasci nel pensiero e nella cultura in generale. Un altro sforzo originale per catturare con i *topoi* le problematiche di trasferimenti e transitorietà nella cultura attuale si trova in Alain Badiou, *Court traité d'ontologie transitoire*, Paris: Seuil, 1998. È famosa la testimonianza di Russell, sbalordito dalla precisione di Peano nelle discussioni al Congresso dei Matematici di Parigi (1900), quando Peano cominciava a profittare dell'emergente simbolismo della logica classica. Un secolo dopo, un buon filosofo dovrebbe profittare delle precise aperture al pensiero che provvede la logica dei fasci.

[27] Peter Freyd, André Scedrov, *Categories, Allegories*, Amsterdam: North-Holland, 1990.

di relatori più generali per trasmettere l'informazione. I modelli del continuo nelle allegorie di Freyd rispondono anche in parte alle inquietudini di Panza, sulla problematica d'impostare in un continuo la sua *specificità* relazionale. La tesi di Burch sulla *necessità* di introdurre una relazione triadica[28] per catturare i grafi esistenziali, continui ed intensivi (mentre una relazione diadica, alla Kuratowski-Wiener, basta per ricostruire insiemisticamente tutte le relazioni, discrete ed estensionali), indicava già che il continuo non cantoriano è legato ad una peculiare specificità relazionale. Le allegorie di Freyd sembrano confermare questa situazione, grazie ad un processo molto generale per costruire la categoria libera associata ad una teoria[29]; infatti, nelle tappe della costruzione, appare sempre intrinsecamente una relazionalità libera, e, nel caso del continuo, per *ostruzioni* di booleanità, quella relazionalità non può ridursi a combinazioni binarie (se la categoria libera associata a un frammento di teoria continua risultasse booleana, tutto il *topos* proiettato dalla categoria libera sarebbe booleano, cosa che, invece, non succede).

Concludendo, la logica dei fasci presenta delle "risonanze armoniche" con i commenti di Bitbol, circa la *non necessità* di sviluppare la meccanica quantistica con il modello dei salti di discontinuità. Così come si potrebbe fare una matematica della meccanica quantistica senza "finzioni utili" discontinue, la logica del continuo può svilupparsi senza i punti, e dunque senza le eventuali discontinuità associate ai punti. La nozione di punto è, di fatto, una "finzione utile": nessuno ha mai visto (né potrà vedere mai) un punto, mentre tutto il tempo vediamo invece delle *vicinanze*. Una regione dipinta di rosso esiste nel mondo *reale*; un punto in rosso non è invece altro che una finzione *ideale*. Nonostante questo, l'influenza della teoria degli insiemi nel XX^{esimo} secolo è stata così forte, che molti studenti sarebbero capaci di difendere ad oltranza l'esistenza dei punti in rosso. Invece, le proprietà logiche del mondo reale sembrano piuttosto essere predicative, non puntuali, e sembrano corrispondere a logiche continue dell'approssimazione. La logica classica, discreta e puntuale, non è altro che un'"utile finzione"; come *dimostra* il teorema del modello generico di Caicedo, essa non è altro che un *limite* ideale di approssimazioni intuizionistiche reali. Da qui, risulta un *capovolgimento* maggiore, simile a quello indicato da Bitbol, che apre immensi spazi per la ragione e per l'immaginazione, tanto matematica quanto filosofica.

Ringraziamenti. A Rossella Fabbrichesi e Giuseppe Longo, per il loro gentile invito a partecipare nel Convegno di Gargnano; la bellezza del Palazzo Feltrinelli e l'altezza dei dibattiti sono stati di grande motivazione. A Rossella, per la sua serie di lavori esemplari attorno a Peirce; la sua dedicazione è

[28] Robert Burch, *A Peircean Reduction Thesis. The Foundations of Topological Logic*, Lubbock: Texas Tech University Press, 1991.

[29] Processo T (teoria) → A_T (allegoria) → MapSplitCor(A_T) (categoria), che da luogo a una categoria "libera" quando si parte da una teoria "pura" di tipi, e che mostra in ciascuna tappa (relazionalità libera, immersione nell'identità, invertibilità parziale, funzionalità) come si "filtra" *verso il generale* una determinata conglomerazione matematica.

un'ispirazione per tutti gli studiosi dell'ultimo grande pensatore universale del mondo moderno. A Marco Annoni, per l'invito a scrivere in questo numero di *Dedalus*, e per la sua generosa revisione del mio rozzo italiano.